RICM1 - 2004/05

Langage et Programmation 2

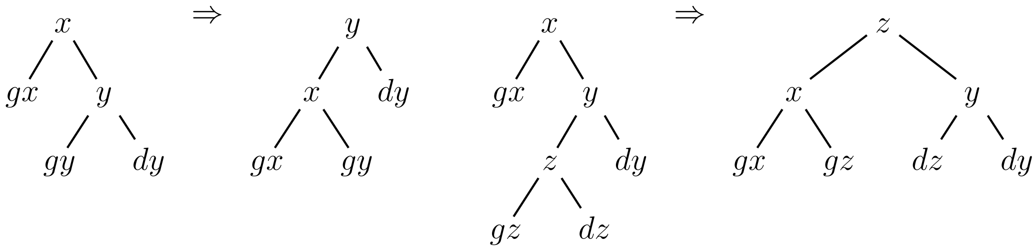
TD8 : Arbres Équilibrés

Les arbres équilibrés Pour éviter des arbres binaires dégénérés, on utilise les arbres équilibrés.

- La profondeur des arbres équilibrés est une fonction logarithmique du nombre de noeuds.
- En cas de déséquilibre : on définit des opérations de rééquilibrage.

La notion de rotation Les algorithmes de rééquilibrage utilisent des transformations locales, appelées rotations. Il existent des rotations simples (rotation gauche et rotation droite) et des rotations doubles (rotation gauche-droite et rotation droite-gauche).

rotation gauche : rotation droite-gauche :



Rotation gauche :
Par rapport à la racine, la profondeur des feuilles de gx augmente de 1, celle des feuilles de gy diminue de 1 et celle des feuilles de gz reste stable.

Rotation droite-gauche :
C'est la combinaison d'une rotation droite du sous-arbre droit, suivie d'une rotation gauche de l'ensemble de l'arbre. Cette fois, la profondeur des feuilles de gz et dz diminue, alors que celle de dy reste stable.

Exercice 1
Écrire les fonctions correspondant aux quatre rotations.

Les arbres AVL (Adelson-Velskii et Landis) Un arbre binaire trié AVL est un arbre pour lequel, en tout noeud, les hauteurs des sous-arbres gauche et droit diffèrent au plus de 1.

```
        →10
       /    \
  →5          15
 /  \        /  \
3    8     12    20
    / \
   6   9
  / \
 6   7
```

L'arbre ci-dessus n'est pas un arbre AVL.

Exercice 2
Écrire la fonction *déséquilibre* qui mesure la différence des hauteurs des sous-arbres gauche et droit.

Définition d'un arbre AVL :
$AVL(t) \Leftrightarrow \ \forall\ s\ \in\ \{SousArbre(t)\},\ \textit{déséquilibre}(s) \in \{-1, 0, 1\}$

Exercice 3
Écrire la fonction *est_AVL* qui teste si un arbre binaire est un arbre AVL.

Les arbres AVL sont des arbres triés. On peut donc utiliser les méthodes sur lesquelles on a travaillé pour les arbres binaires de recherche, pour rechercher, ajouter ou supprimer un élément. Cependant, un ajout ou une suppression peuvent déséquilibrer l'arbre. Il faudra alors le rééquilibrer.

Exercice 4: Rééquilibrage
Écrire la fonction *rééquilibrer* qui rééquilibre un arbre AVL a.

Principes généraux de rééquilibrage : On vient d'ajouter un élément à un arbre AVL.

Soit a un arbre de la forme Noeud(x,g,d).
(*rééquilibrer*(a) est définie seulement pour *déséquilibre*(a) $\in$ {-2,-1,0,1,2})
- soit *déséquilibre*(a)= 0, 1 ou -1 $\rightarrow$ *rééquilibrer*(a) = a.
- soit *déséquilibre*(a)= 2 $\wedge$ *déséquilibre*(g)= 1 $\rightarrow$ *rééquilibrer*(a) = Rd (a)
- soit *déséquilibre*(a)= -2 $\wedge$ *déséquilibre*(d)= -1 $\rightarrow$ *rééquilibrer*(a) = Rg (a)
- soit *déséquilibre*(a)= 2 $\wedge$ *déséquilibre*(g)= -1 $\rightarrow$ *rééquilibrer*(a) = Rgd (a)
- soit *déséquilibre*(a)= -2 $\wedge$ *déséquilibre*(d)= 1 $\rightarrow$ *rééquilibrer*(a) = Rdg (a)